

“섬 (island)” 문제 풀이

작성자: 조승현

모든 입력에서, 지역 건설 연산은 1번만 사용하면 충분하며 1번은 반드시 필요하기 때문에 지역 건설을 정확히 1번 사용하는 방법을 찾으면 충분하다. 이에 대한 증명 역시 아래 풀이에 포함되어 있다.

부분문제 1

$N = 3, 4, 5$ 인 경우, 동일한 모양의 그래프를 하나로 칠 때 각 N 에 대해 한 종류의 그래프만이 존재한다 (다른 모든 지역과 연결된 지역을 생각하면 편하다). 해당 그래프에 대해서만 문제를 해결해서 답을 출력하면 된다. 구체적인 방법은 부분문제 1을 포함하는 부분문제 2의 풀이에 작성하였다.

부분문제 2

0번 지역이 $1, 2, \dots, N - 1$ 번 지역과 연결되어 있다고 가정할 수 있다. 0, 1, 2번 지역에 대해 지역 건설을 사용하여 N 번 지역을 건설하면, 다음과 같은 간선 구성을 가지는 두 트리를 찾을 수 있다.

- $T_1 = \{(0, 2), (0, 3), \dots, (0, N - 1), (0, N)\} \cup \{(1, N)\}$
- $T_2 = \{(0, 1), (1, 2), \dots, (N - 2, N - 1)\} \cup \{(2, N)\}$

부분문제 3

육지 도로 $N - 3$ 개로 IOI 나라는 삼각분할되는 것을 생각하면 부분문제 3의 조건 하에서 육지 도로들은 사이클이 존재하지 않는 그래프를 이룬다는 것을 알 수 있다. 나아가, 육지 도로는 $N - 2$ 개 지점에 대한 트리가 된다. 육지 도로의 트리가 포함하지 않는 두 지점을 A, B 번 지점이라 하자. A 번 지점은 $A + 1, A - 1$ 번 지점과만 연결되어 있고, $A + 1$ 번 지점과 $A - 1$ 번 지점은 육지 도로로 연결되어 있다. ($A = 0$ 인 경우는 $1, N - 1$ 번 정점, $A = N - 1$ 인 경우는 $0, N - 2$ 번 정점과 연결되어 있지만, 편의상 앞과 같이 서술하였다) $A, A + 1, A - 1$ 번 지점에 대해 지역 건설을 한 후에는 다음과 같은 두 트리를 찾을 수 있다.

- $T_1 = (\{(0, 1), (1, 2), \dots, (N - 2, N - 1), (N - 1, 0)\} \cup \{(A, N), (A + 1, N)\}) \setminus \{(A, A + 1), (B, B + 1)\}$
- $T_2 = E \setminus T_1$

위에서 T_1 은 최대한 해안 도로를 많이 사용, T_2 는 최대한 육지 도로를 많이 사용해서 만든 트리라고 생각하면 이해하기 쉽다.

부분문제 4

아무 지역 건설 가능한 점 a, b, c 를 골라 지역 건설을 시행하면 지역은 $N + 1$ 개, 도로는 $2N$ 개가 된다. 또한, 2개 미만의 도로와 연결된 지역은 존재하지 않는다. 비둘기집의 원리에 의해 2개 이하의 도로와 연결된 지역이 존재하므로, 정확히 2개의 도로와 연결된 지역이 존재한다. 이를 u 라 하자. u 와 연결된 간선을 v, w 라 하면 v 와 w 는 도로로 연결되어 있다. 그래프에서 u 및 u 와 연결된 간선을 지우면 지역은 N 개, 도로는 $2N - 2$ 개가 되고, 또한 이 그래프 역시 삼각분할 형태의 그래프가 되며, 앞서 서술한 조건을 만족함을 알 수 있다. 따라서, 문제의 크기가 $N + 1$ 에서 N 으로 작아진 셈이 된다. 작아진 문제를 해결한 후 찾은 두 트리를 T_1, T_2 라 할 때, T_1 에 (u, v) 를, T_2 에 (u, w) 를 추가하면 원래 문제의 트리가 된다. 따라서, 차수가 2인 정점을

찾아 제거하고 작아진 문제를 해결한 후 두 트리에 간선을 하나씩 추가해주는 것을 반복하여 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 5

부분문제 4에서 설명한 문제를 queue등의 자료구조를 이용하여 $O(N)$ 에 구현하면 부분문제 5를 해결할 수 있다.